Parametrisierungsgeschichte der neuzeitlichen Akustik

von
Axel Volmar

volmar@chromsand.net
Tel.: 030 - 20 64 80 88

15. Juli 2003

Inhaltsverzeichnis

> Alle Bewegung verursacht Schwingungen, allein uns fehlen die Ohren, sie zu hören.
>
> Marin Mersenne, *Harmonie Universelle*

> [Die Mathematik] bringt uns [die] Erscheinungen nahe, macht sie uns messbar und scheint eine besondere Begabung des menschlichen Geistes zu sein, um das, was ihm durch den Mangel seiner Sinne und die Kürze seines Lebens verloren geht, zu ersetzen.
>
> Joseph de Fourier, *Analytische Theorie der Wärme*

> Endlich sehe ich Land und eile ans Ufer.
>
> René Descartes. *Musicae Compendium*

1 Einleitung

Während die großen Seefahrer wie Columbus, Magellan und da Gama Ende des 15. Jahrhunderts begannen, die Weltmeere zu besegeln und durch deren systematische Kartografierung den Weg für eine beispiellose räumliche Ausdehnung der europäischen Seemächte frei machten, begaben sich die Daheimgebliebenen auf Entdeckungsreisen in ihren Wohn- und Studierzimmern. Sie reisten, mit Tele- und Mikroskopen medial aufgerüstet, in fernste Fernen und nächste Nähen des Raums, ohne sich jedoch dabei von der Stelle bewegen zu müssen. Die Geschichte des europäischen und das heißt neuzeitlichen Denkens ist eine Geschichte der Kolonialisierung, des Vor- und Eindringens in Bereiche des nie Gekannten – und das im Großen wie im Kleinen. Man begnügte sich nicht mehr mit dem Glauben, dass dem Kosmos eine höhere Ordnung innewohne, sondern begann nach dem Aufbau der göttlichen Schöpfung zu fragen und welchen Gesetzten sie gehorche. Hier liegen die Anfänge der „exakten Wissenschaften“ und vor allem der neuzeitlichen Physik, die durch die Schaffung von Experimentalbedingungen zu reproduzierbaren Ergebnissen gelangte, auf deren Grundlage sich die beobachteten Phänomene zu Naturgesetzen verallgemeinern ließen. Verallgemeinerungen werden durch *Parameter* ermöglicht, die bestimmte, im Experiment isolierte Eigenschaften repräsentieren. Nach und nach konnten so komplexe Abläufe in eine überschaubare Menge von Einzelphänomenen zerlegt werden.

Die Geschichte der abendländischen Musiktheorie und mit ihr die Entwicklung der wissenschaftlichen Akustik ist maßgeblich bestimmt von der Isolierung oder Herauslösung elementarer Merkmale aus der Gesamtheit aller Klänge, als die sich alles Hörbare dem Ohr vorstellt. Im Laufe einer langen Entwicklung wurden wahrnehmungsbasierte Qualitäten von Klängen wie Tonhöhe, Klangfarbe und Lautstärke mit sehr unterschiedlichen Theoriekonzepten und Produktionsverfahren gehandhabt, bevor man sie schließlich parametrisch an physikalische Naturgesetzmäßigkeiten wie Frequenz, Spektralgehalt und Schalldruck koppelte.
Die musiktheoretischen beziehungsweise akustischen Forschungen zwischen Mitte des 16. bis Mitte des 19. Jahrhunderts erscheinen dabei als immer schon interdisziplinäre Wissenschaft, die wesentliche Impulse unter anderem aus den Bereichen der Arithmetik,

Funktionstheorie und Physiologie erhält und deren Ergebnisse sich wiederum als äußerst fruchtbar für Wissensgebiete erweisen, die außerhalb der akustischen Forschung liegen, vor allem für die klassische Mechanik. Durch diesen Wissenstransfer konnte die mittelalterliche, der Mathematik zugeordnete *Musiktheorie* ihren Gegenstandsbereich von den *Materialeigenschaften* der tönenden Körper auf die Behandlung der durch den Äther reisenden Schalle selbst erweitern. Am Ende dieser Entwicklung steht eine allgemeine *Akustik*, deren Gegenstand die Informationskette Schallquelle - Schallfeld - Schallempfänger bildet.
Diese unterschiedlichen, beständigen Wandlungen unterworfenen Vorstellungen in der Musiktheorie hatten zudem wesentliche Auswirkungen auf Kompositionslehre[1] und Instrumentenbau[2] – gemeinsam beeinflussten sie die Musikpraxis und damit die Beschaffenheiten der realen Klänge, das heißt die musikalische Ästhetik.

Die vorliegende Arbeit geht am Beispiel der beiden wichtigsten akustischen Wahrnehmungen *Tonhöhe* und *Klangfarbe* - auch oft als Quantität und Qualität von Schallereignissen bezeichnet - den oben beschriebenen Entwicklungen der Isolierung akustischer Parameter nach. Die Tonhöhe stand zunächst als relative Größe in Form musikalischer Intervalle Pate für die numerologische Musiktheorie der Pythagoräer, bevor sie in der neuzeitlichen Schwingungstheorie als eine absolute Größe an die sie erzeugenden Schwingung gekoppelt wurde. Fortan wurde die Frequenz, da sie eine direkte Bezugsgröße zur Höhe von Tönen darstellt, als universaler Parameter für die Tonhöhe etabliert und verdrängte so die traditionellen, bloß indirekten, den realexistierenden Instrumentensaiten entnommenen Größen wie Saitenlänge, -dicke, Spannung und Materialdichte. Im 17. Jahrhundert geraten zudem die unterschiedlichen Charakteristiken oder Farben der Orchesterinstrumente in den Fokus der akustischen Forschung, die aufgrund fehlenden Wissens über das Verhalten von Schwingungssystemen noch begrifflich voneinander geschieden wurden. Anfang des 18. Jahrhunderts konnten die Klangfarben dagegen mit der unterschiedlichen Zusammensetzung der Obertöne erklärt werden.
Alle Akustik endet schließlich im 19. Jahrhundert bei Hermann v. Helmholtz, denn er zeichnet ein detailliertes Bild der physikalischen akustischen Wellenvorgänge im Raum und deren physiologischen Verarbeitungsprozessen im Gehör. Helmholtz' Wissensmodelle der akustischen Wellen haben jedoch nicht nur in der Wissenschaft das letzte Wort, sondern wirken sich in der Folge massiv auf Entwürfe und Konstruktion technischer akustischer Medien wie Telefon, Phonograph und Synthesizer aus. Und so schreibt sich die Geschichte fortwährender Parametrisierung als mathematische Domestizierung und Kolonialisierung einer tönenden Gesamtheit, die Bewegungen und Erschütterungen von etwa 20-20.000 Schwingungen pro Sekunde – unsere akustische Bandbreite – umfasst und uns auditive Wahrnehmung beschert.

[1]Die barocke Affektenlehre basiert auf Descartes' musiktheoretischen Überlegungen. Vgl. Gerhard Nestler. *Geschichte der Musik*. S.230ff.; die Heraushebung der Dur-Moll-Tonalität in Rameaus Harmonielehre gründet stark auf den akustischen Forschungen Joseph Sauveurs.

[2]Helmholtz selbst hatte keinen geringen Anteil am Erfolg der Firma Steinway.

2 Tonhöhe oder Geschichte des Akustischen Tons

2.1 Musiktheorie der griechischen Antike

Das Verhältnis der Griechen, respektive der pythagoräischen Schule, zum Meer der Klänge war ein sehr gespaltenes: Sie behandelten nur, was ihnen harmonisch, das heißt als passend *zusammengefügt*[3] beziehungsweise maßvoll erschien - die Intervalle zwischen Tonhöhen wurden aus den Streckenverhältnissen der klangerzeugenden Saiten konstruiert; die Tonlängen und Versmaße aus den zeitlichen Verhältnissen von kurzen und langen Vokalen; alle anderen Hörbarkeiten wie akustische Widerhalle Zeusscher Blitze auf den hellenischen Hochebenen oder der gegen den Pelleponnes anbrandende Okeanos wurden in ihrer chaotischen Natur als Unsagbares (*Álogon*) glatt ignoriert und stattdessen in die Sphären der Götter und Dämonen verbannt.[4]
Als maßvoll und höchste irdische Gesetzlichkeit erschienen den Pythagoräern musikalische Intervalle, die durch das Abteilen von Saitenlängen in Verhältnissen der ersten natürlichen Zahlen 1-4 auf Monochorden entstanden. Von **Pythagoras (582-507)** wurde die *Tetraktys* zum Weltsystem verallgemeinert; alles andere verschwiegen. So ist es sehr verständlich, dass das Schweigen zu den obersten Geboten pythagoräischen Philosophierens gehört hat, wenn man auf Ausnahmen der harmonischen Regel stößt, insofern Samos, Kroton und Metapont – den drei Städten, in denen sich Pythagoras zumeist aufgehalten haben soll – allesamt am Meer liegen und ihm dessen brausender Klang unmöglich entgangen sein kann.

In Griechenland kam es nicht auf die Phänomene selbst an, sondern auf ihren Bauplan, ihre *Idee*. „Das Wesen von jeglichem, was ist - so lehrte es Pythagoras seinen Schülern - ist seine Zahl.“[5] Nur so wird nachvollziehbar, wie es die pythagoräische Schule einerseits geschafft haben mochte, die konsonanten Intervalle oder Stufen der Tonhöhen elegant mit regelmäßigen Verhältnissen von Saitenlängen zu erklären und noch dazu ihre Harmonielehre zur Weltanschauung zu erweitern, während sie andererseits im akustischen Alltag ihre Ohren ebenso mit Wachs verstopft zu haben scheinen wie Odysseus die Ohren seiner Seeleute, als er durchs Meer der Sirenengesänge segelte; sonst hätte ihnen auffallen müssen, dass ihr Weltbild auf einem sehr fragilen Fundament stand.
Andererseits war Pythagoras der Erste, der durch die wahrscheinlich in Ägypten erlernte Praxis der Landvermessung aus der chaotischen Welt des Reellen überhaupt regelmäßige Beziehungen von Zahlen zueinander als ein in sich geschlossenes theoretisches System abstrahiert hat, mit denen das Ordnen ebenso unsichtbarer wie vergänglicher Töne mathematisch handhabbar wird. Denn seit Pythagoras und seinen Schülern gilt:

[3] Das griechische Wort *harmonía*, ursprünglich „Fügung“, bezeichnete erst später einen „Wohlklang“.
[4] Beispiele aus den „Acousmata“ legen diese Vermutung nahe: In den Geräuschen machen Götter auf sich aufmerksam und Dämonen sich bemerkbar.
[5] Friedrich Kittler, *Musik und Mathematik I.* Vorlesung, gehalten im Sommersemester 2001 am Kulturwissenschaftlichen Seminar der Humboldt-Universität Berlin, S.22 (DIN A4 Ausdruck).

Die Halbierung der Saitenlänge entspricht der Verdopplung der Höhe ihres Tons[6]. Die Oktave bezeichnete deshalb das Streckenverhältnis 2:1; weitere konsonierende Intervalle entstanden ebenfalls aus einfachen Verhältnissen mit möglichst niedrigen und ganzen Zahlen im Zähler und Nenner (3:2 für die Quinte und 4:3 für das Komplementärintervall der Quarte). Das Problem an Pythagoras' prägender Theorie war nun, dass er die gefundenen Verhältnisse blind verallgemeinerte und sie zu sogar kosmologischen Invarianten erklärte. Dieses Denken zeigt sich deutlich in der sogenannten Pythagoras-Legende: Nach ihr sollen auf Ambosse schlagende Hämmer, deren Gewichte in den Verhältnissen 12:9:8:6 zueinander stehen, Grundton, Quarte, Quinte und Oktave ergeben, was nicht mehr als ein Wunschdenken darstellt, weil hier die geltenden Beziehungen des Parameters der Länge auf die Parameter Masse beziehungsweise Volumen übertragen werden, ohne diese erneut zu überprüfen.

Der griechischen Musiktheorie nach Pythagoras waren absolute Tonhöhen (oder gar ein normierter Stimmton) völlig fremd. Was jedoch Pythagoras und seine Schüler beschäftigte und von ihnen zur Wissenschaft ausgebaut wurde, war die relative Ordnungsstruktur in den Tonhöhen, die dem Gehör bestimmte Töne als *gleich beziehungsweise ähnlich* erscheinen lässt. Der Unterschied zwischen diesen Tönen, die - modern ausgedrückt - im Oktavabstand zueinander stehen, wurde als eine Verdopplung der Tonhöhe aufgefasst. Die Mathematisierung dieser physiologischen Kuriosität begann mit der Erkenntnis, dass sich eine solche Verdopplung der Tonhöhe erzeugen und zudem reproduzieren ließ, wenn man an einem Saiteninstrument die Länge des schwingenden Teils um exakt die Hälfte verkürzte. So bezeichnete man den Tonsprung die *diplásion* (gr. = das Doppelte) und identifizierte sie mit dem Verhältnis 2:1 – zwei Längeneinheiten für den Ausgangston, eine Längeneinheit für den Verzweifachten. Zwischen diesen gleichen Tönen konnte Pythagoras noch zwei weitere Tonstufen (Quinte und Quarte) quantifizieren, die sich vom Gehör eindeutig zuordnen ließen und mit den Verhältnissen 3:2 beziehungsweise 4:3 angeschrieben wurden. Pythagoras setzte also Verhältnisse zwischen Tonhöhen mit Verhältnissen zwischen Längen in Beziehung. Deshalb heißt die pythagoräische Musiktheorie im speziellen *Tetraktys*, weil sich alle pythagoräischen Verhältnisse aus den natürlichen Zahlen Eins bis Vier erzeugen lassen, und im allgemeinen *Proportionslehre*. Damit hatte Pythagoras „eine radikal unsichtbare Sache, die Tonhöhe, auf geometrische, [...] also sichtbare Verhältnisse gebracht“[7].

Pythagoras war offenbar überzeugt davon, ein tiefes Konstruktionsgeheimnis des Kosmos' entdeckt zu haben, denn er übertrug die Proportionen umstandslos auch auf andere Eigenschaften tönender Körper: auf die Dicke und Spannung musikalischer Saiten, auf die Gewichte von Hämmern, die Ambosse bearbeiten und auf die Abstände zwischen den Planetenbahnen, die so eine Sphärenharmonie hervorbringen können sollten. An den genannten Verallgemeinerungen ist weniger interessant, dass sie falsch beziehungsweise im

---

[6]Dasselbe sollte bei der Verdopplung der Saitenspannung sowie der Verdopplung des Saitenquerschnitts gelten.

[7]Friedrich Kittler, *Musik und Mathematik I*. Vorlesung, gehalten im Sommersemester 2001 am Kulturwissenschaftlichen Seminar der Humboldt-Universität Berlin, S.16 (DIN A4 Ausdruck).

letzten Fall völlig absurd sind, sondern vielmehr, dass sie auf einem Missverständnis beruhen – die Proportionslehre beschreibt einen Ausschnitt der Welt, der im wesentlichen in der *Physiologie des Ohres* begründet liegt. Dieser Ausschnitt verwehrt zweierlei: Erstens ist die Bestimmung der Tonhöhe immer an konkrete geometrische beziehungsweise materielle Gegebenheiten eines Instruments gebunden, so dass sich ein Maß für absolute Tonhöhen auf dieser Grundlage nur schwer hätte entwickeln können, weil es immer von den jeweiligen Parametern des Referenzinstruments abhängig gewesen wäre (im Falle der Saite wären neben der Saitenlänge mindestens noch ihre Spannung, Dicke und Dichte zu bestimmen gewesen). Zweitens ist die Ordnung der konsonanten Tonstufen einer unermesslichen Unordnung von Zwischentönen gegenübergestellt, eine Unordnung, die sich der Quantifizierung in einfachen Verhältnissen entzieht und dennoch erklingt. Die Theorie der Konsonanzen ist ein hermetisch abgeschlossenes Netz starr geknüpfter Verbindungen, das keine Außenwelt irrationaler Verhältnisse kennt und somit die akustische Vielfalt der reellen Welt notwendig verfehlen muss.

2.2 Antike und neuzeitliche Mathematik

Dass dieses Andere der pythagoräischen Intervalle, also all das, was sich außerhalb der relativen Ordnung der Intervalle abgespielt haben mochte, für Pythagoras schlicht irrelevant gewesen sein muss, mag darin begründet liegen, dass die griechische Mathematik laut Oswald Spengler eine an Körpern und deren Größen orientierte Mathematik gewesen ist:

> „Jener Ausspruch [der Pythagoräer], daß die Zahl das Wesen aller *sinnlich greifbaren* Dinge darstelle, ist der wertvollste der antiken Mathematik geblieben. Mit ihm ist die Zahl als Maß definiert worden. [...] Messen in diesem Sinne heißt etwas Nahes und Körperhaftes messen.“[8]

Aus dem Vermessen dieser Körper und den Beziehungen ihrer Größen sind die pythagoräischen Verhältnisse als Verallgemeinerungen hervorgegangen.

Zu Beginn dessen, was wir Neuzeit nennen, hat sich ein Wandel des mathematischen Fundaments beziehungsweise der fundamentalen Gegenstände, auf die sich die Mathematik stützt, vollzogen. Analog zur Konstruktion des zentralperspektivischen Bildraums richtet sich die mathematische Aufmerksamkeit von einem Beobachtungspunkt einerseits in die endlose Weite des *Raumes*, zu deren Inventar die euklidischen Körper nun werden, und andererseits vom *gewordenen* Ding hin zum Vollzug seiner Konstrutkion oder ihrem *Werden.* Der Kreis als Gewordenes in der antiken Mathematik (oder euklidischen Geometrie) wird zum Beispiel zur trigonometrischen Kreis- beziehungsweise Sinusfunktion als ein Werden in der neuzeitlichen Mathematik, die zuerst als analytische Geometrie gebo-

[8] Oswald Spengler, *Der Untergang des Abendlandes.* S.85

ren und später zur Infinitesimalrechnung heranwachsen wird. Auf diese neue Grundlage der Mathematik weist auch Spengler hin:

> „Wie alles Werden das ursprüngliche Merkmal der *Richtung* (Nichtumkehrbarkeit), so trägt alles Gewordene das Merkmal der *Ausdehnung*, und zwar so, daß nur eine künstliche Trennung der Bedeutung dieser Worte möglich erscheint. Das eigentliche Geheimnis alles Gewordenen und also (räumlich-stofflich) Ausgedehnten aber verkörpert sich im Typus der *mathematischen* im Gegensatz zur *chronologischen* Zahl.“[9]

Oder, so könnte man im Hinblick auf die analytische Geometrie hinzufügen, im *den Raum repräsentierenden, kosmo-logischen* im Gegensatz zum *chrono-logischen* Buchstaben, das heißt konkret in der abhängigen Variable x, y, z beziehungsweise t einer Funktion. Hier sollte deutlich werden, warum die pythagoräische Theorie keine absoluten Tonhöhen hatte messen können: Das Maß, dessen sie bedurft hätte, wäre ein zeitliches gewesen. Prozesse jedoch hat keine griechische Geometrie handhaben können, denn diese und mit ihnen das Kreisen musikalischer Saiten durch die Zeit waren ihr – wie gesagt – schlicht fremd.

Die Mathematisierung der absoluten Tonhöhe und in der Folge das Verständnis des Tons fällt in eben diese Richtungsänderung mathematischer Praxis, die sich in den *physico-mathematischen* Wissenschaften[10] wie Astronomie, Musiktheorie, Ballistik und Mechanik im 16. Jahrhundert – mit der Entstehung der exakten Wissenschaften – abzeichnet; weg vom Vermessen der Dinge und ihrer Größen hin zu einem Verfolgen ihrer Bahnen im Raum und in der Zeit. Die Tonhöhe wird nicht mehr auf materielle Parameter akustischer Instrumente bezogen, sondern auf die frei im Raum und in der Zeit sich ausbreitenden Schwingungen oder Tonstöße, die durch die Rückschwünge der Instrumentensaiten entstehen, konkret also auf Wellenlängen einerseits und Schwingungszahlen oder Frequenzen andererseits.

2.3 Von der antiken Proportion zur Identifizierung der Tonhöhe mit der Schwingungsfrequenz

Im 16. Jahrhundert ist die pythagoräische Numerologie in der Musiktheorie noch weit verbreitet, doch durch die Entwicklung der Polyphonie, den daraus entstehenden Stimmungsproblemen und den Anfängen der phyikalischen Untersuchungen von Schallphänomenen wird das Gebäude der alten *Universellen Harmonie* zunehmend marode. Denn ganz im Gegensatz zu ihren antiken Vorgängern begannen die neugierigen Pioniere der exakten Wissenschaften gerade die unliebsamen Fragen zu lieben[11]. Die neuen

[9] Ebd., S.76

[10] nach dem Werk *Questions physico-mathématiques* von Marin Mersenne aus dem Jahre 1635.

[11] Mersenne stellt in diesem Falle das Paradebeispiel schlechthin dar: In seiner *Harmonie Universelle* stellt er einen ganzen Katalog mit Fragen auf, von denen er zwar einige selbst beantwortet, die Mehrheit jedoch seinen akademischen Nachfolgern hinterlässt.

Musiktheoretiker gaben sich gerade nicht mehr damit zufrieden, *dass* mit den pythagoräischen Verhältnissen relative Tonhöhen beschrieben werden konnten, sondern begannen zu untersuchen, *warum* diese zustande kamen: Sie begannen, neben *physikalischen* Ursachen für die Tonhöhe auch das Sein der Töne selbst zu ergründen. Und wie um diesen Wechsel der Beobachtungsperspektive zu unterstreichen, schreibt René Descartes zu Beginn seines kleinen *Musicae Compendium*: „Von der Beschaffenheit des Tones selbst, womit und wodurch er am geeignetsten erzeugt wird, handeln die Physiker.“[12]

2.3.1 Die Widersprüche in der Proportionslehre: Parameterabhängigkeit statt Universalität

Vincenzo Galilei (1520-1591) unterzieht 1589 in seinem *Discorso*[13] die antiken Proportionalitäten zwischen Länge, Spannung und Dicke der Saiten zur Tonhöhe einer experimentellen Überprüfung, weil er nicht einsehen kann, warum man die Tonhöhe immer nur mit der Saitenlänge assoziieren sollte. Dabei stellt er fest, dass die Proportionalität von Spannung und Tonhöhe nicht dieselbe ist wie bei den Saitenlängen und Querschnitten[14]. Diese Arbeiten werden von seinem Sohn **Galileo Galilei (1564-1642)** in seinen *Discorsi* (*Unterredungen über zwei neue Wissenschaften*) von 1638 aufgegriffen. Er schreibt, dass die Beziehungen von Saitenlängen auf dem Monochord nicht ausreichend seien,

> „... um die Bestimmung des Verhältnisses 2:1 oder 3:2 als natürliche Verhältnisse der Oktave und der Quinte zu rechtfertigen. Der Grund meiner Überlegungen ist folgender. Es gibt drei Möglichkeiten, den Ton einer Saite zu erhöhen: erstens, indem man sie verkürzt; zweitens, indem man sie stärker spannt; drittens, indem man sie dünner macht. [...] Behalten wir aber dieselbe Länge und Dicke bei und möchten wir sie zum Aufstieg in die Oktave durch vermehrte Spannung bringen, dann genügt es nicht, sie um das Doppelte zu spannen, sondern es bedarf des Vierfachen.“[15]

In seinen *Questions harmoniques* von 1634, einem der Vorbereitungswerke der *Harmonie Universelle*, widerlegt **Marin Mersenne (1588-1648)** die Pythagoras-Legende, die er als völligen Nonsens entlarvt:

> „Man sollte sich überhaupt nicht darüber wundern, daß viele an der Wahrheit der Prinzipien der Musik zweifeln, da ja die Methode, die Pythagoras als ihrem Erfinder zugeschrieben wird, gänzlich falsch ist. Denn wenn alle Prinzipien und Schlußfolgerungen dieser Wissenschaft so wenig Wahrheit enthielten wie das, was man von den Hämmern erzählt, die er [Pythagoras] benutzte, um die Verhältnisse der Konsonanzen zu entdecken, dann darf man annehmen, daß alles, was sie lehrt, falsch ist,

[12] René Descartes. *Musicae Compendium.* S.3

[13] Sigalia Dostrovsky/John T. Cannon. *Entstehung der musikalischen Akustik (1600-1750).* S.16

[14] Ebd.: „Galilei bestritt nicht, daß die pythagoreischen Zahlenverhältnisse auf dem Monochord zu finden seien; aber er erkannte sie als einen Sonderfall.“

[15] Galileo Galilei. *Discorsi*, Opere VIII, S.143f.. Zitiert aus: Dostrovsky/Cannon. *Entstehung der musikalischen Akustik (1600-1750).* S.17

> insofern als die verschiedenen Hämmer, deren Größen oder Gewichte im Verhältnisse 12:9:8:6 stehen, eben nicht die Oktave, Quinte und Quarte ergeben, wenn man mit ihnen auf einen Amboß schlägt, wie jedermann selbst nachprüfen kann, um dabei festzustellen, daß die Töne der genannten Hämmer mehr einen Einklang ergeben als Oktave, Quinte und Quarte.“[16]

Mitte der 30er Jahre des 17. Jahrhunderts haben die pythagoräischen Verhältnisse als verallgemeinerbare Größen endgültig ausgedient. Untersuchungen dieser Art belegen den berechtigten Zweifel an dem überlieferten Wissen der anktiken Musiktheorie, denn sie zeigen deutlich, dass die pythagoräischen Zahlenverhältnisse alles andere als allgemeingültig sind. Schließlich sind sie jedoch erst der Anfang vom Ende der antiken Musiktheorie.

2.3.2 Die Koinzidenztheorie: Frequenz als neuer universeller Parameter

Parallel zu den Hinterfragungen der Grundlagen der pythagoräischen Verhältnisse entsteht eine völlig neue Auffassungsweise vom Ton als physikalischem Phänomen. Sie geht einher mit der Frage nach der Beschaffenheit von Schallen selbst und damit auch der Frage nach der Übertragungskette Instrument - Raum - Empfängerohr, die offenbar mit den Schwingungsbewegungen der Saiten zusammenhängen musste.

Giovanni Battista Benedetti (1530-1590) scheint der erste gewesen zu sein, der diese Fragen (brieflich ungefähr 1563, gedruckt 1585[17]) in den musiktheoretischen Diskurs einbringt. Die hörbaren Töne sowie ihre Intervalle und Konsonanzen werden nicht mehr durch die Längenverhältnisse, sondern durch die Frequenzen erklärt. So stellt man sich stehende Töne als Reihen von einzelnen Tonstößen (Impulsen) und Pausen vor, die sich abwechseln und periodisch aufeinander folgen. Peter Dear schreibt in seinem Essay *Mersenne and the Learning of the Schools*:

> „Benedetti had adumbrated [...] a physical interpretation to the ratios associated with musical consonance. It had long been accepted that a note's pitch increased with frequency of vibration and that the shorter a string, *ceteris paribus*, the more rapidly it vibrated. Benedetti asserted that for a given tension, strings vibrate at a frequency inversely proportional to their length. Each stroke of the vibration produces a pulse which is transmitted through the air; consonances arise when the pulse from two strings coincide regularly and often. The octave can then be interpreted as a frequency ratio of 1:2 rather than as a transcendental ratio of 2:1 instantiated in string lengths.“[18]

Bei Benedetti zeichnen sich eindrucksvoll die intuitiven Methoden und das Dilemma der sich entwickelnden Experimentalwissenschaft ab: die Tücke des Realen. Denn ebenso wie Galileo Galileis Fallgesetze zwar richtig erdacht waren, sich jedoch schlecht nachweisen

---

[16] Marin Mersenne. *Questions harmoniques*. S.166 f.. Zitiert ausDostrovsky/Cannon. *Entstehung der musikalischen Akustik (1600-1750)*. S.18

[17] vgl. Sigalia Dostrovsky/John T. Cannon. *Entstehung der musikalischen Akustik (1600-1750)*. S.15

[18] Peter Dear. *Mersenne and the Learning of the Schools*. S.150

ließen, so ist es ebenso unmöglich, zwei Saiten so zu koordinieren, dass ihre zusammenfallenden *Schläge* auch tatsächlich zusammenfallen. Erst Hermann von Helmholtz wird drei Jahrhunderte später klarstellen, dass die letzte Ursache der Konsonanzempfindung allein in der Beschaffeneit des Gehörs gründet.
Dennoch hatte Benedetti eine revolutionäre Entdeckung gemacht, denn er hatte in der Schwinungsfrequenz einen *geräteunabhängigen Parameter* für den Luftschall selbst gefunden. Zudem hatte er mit dem, was später zur Koinzidenztheorie ausgebaut werden sollte, die alten pythagoräischen Intervalle auf eine physikalische Grundlage gestellt - allerdings mit einem kleinen Unterschied: Da sich die Saitenlänge zur Frequenz umgekehrt proportional verhält, invertieren sich von nun ab alle Verhältnisse.

Auch der holländische Arzt **Isaak Beeckman (1588-1637)** erklärt die Beschaffenheit der Töne 1614 frequenztheoretisch: Der „... Ton, den wir hören, ist zusammengesetzt aus so vielen Tönen [Tonstößen], wie es Rückschwünge der Saiten an ihren [Ruhe]Ort gibt.“[19] Konsonanzen entstehen durch einfache Verhältnisse dieser Tonstöße zueinander.

> „... in derselben Zeit, in der die tiefere Stimme das Ohr einmal trifft, trifft es die höhere zweimal, so daß wenigstens ein Ton [Tonstoß] der höheren Stimme die Ohren trifft, bevor die tiefere Stimme die Ohren erreicht, auch wenn beide zugleich beginnen. Doch der zweite Ton [Tonstoß] der höheren Stimme erreicht die Ohren gleichzeitig mit der tieferen Stimme. Der dritte Ton [Tonstoß] der höheren Stimme entsteht wiederum in der Mitte zwischen dem ersten und zweiten Ton [Tonstoß] der tieferen Stimme, das heißt, ungerade Töne [Tonstöße] der höheren Stimme entstehen immer in den Pausen der tieferen Stimme ...“[20]

Analog zu Benedetti stellt Beeckman die umgekehrte Proportionalität einer Saitenlänge zu ihrer Frequenz fest. Anders als Benedetti fasst Beeckman seine Erkenntnis jedoch zusätzlich in einer mathematischen Beziehung zusammen, was in der Folge ermöglicht, die *Tonhöhe als akustische Eigenschaft* mit der *Frequenz als mathematisiertem Parameter* zu identifizieren[21]:

$$v \sim 1/l \tag{1}$$

Problematisch an Beeckmanns richtiger Vermutung blieb weiterhin, dass sie schlecht zu beweisen war, denn bekanntlich unterlaufen die akustischen Schwingungen die optische Wahrnehmung. So blieb Beeckmans Frequenztheorie zunächst weitgehend unbeachtet – zu Unrecht, war doch Beeckman derjenige, der die Beziehung zwischen Frequenz und Tonhöhe als erster so deutlich dargestellt hatte. Selbst in René Descartes' 1650 posthum veröffentlichten *Musicae Compendium*, das dieser für Beeckman um 1622 geschrieben

[19] Isaac Beeckman. *Journal I.* S.53. Zitiert ausDostrovsky/Cannon. *Entstehung der musikalischen Akustik (1600-1750).* S.20

[20] Isaac Beeckman, *Journal I.* S.53. Zitiert aus: Dostrovsky/Cannon. *Entstehung der musikalischen Akustik (1600-1750).* S.20

[21] Sigalia Dostrovsky/John T. Cannon. *Entstehung der musikalischen Akustik (1600-1750).* S.22

hatte, wird die Proportionalitätenbeziehung von Tonhöhe und Frequenz nur in einem Nebensatz gestreift. Descartes schreibt: „Auf dieselbe Weise wird auch das begriffen, wenn man sagt, daß ein Ton, der mit vielen Stößen das Ohr trifft, je höher ist, desto schneller diese sind."[22] Mersenne allerdings nahm Beeckmans Koinzidenztheorie dankbar auf, sah er doch in ihr eine Möglichkeit, die Widersprüche der antiken Theorie aufzulösen, ohne diese jedoch völlig aufgeben zu müssen[23]. Denn von der Vorstellung der „reinen" Konsonanzen auf der Grundlage der pythagoräischen Verhältnisse wollte oder konnte sich Mersenne - ebenso wie Descartes - nicht trennen, denn es gäbe, so schreibt er in *La Vérité des Sciences*, „nichts Nützlicheres in der ganzen Arithmetik als diese Verhältnisse"[24]. Wie die Mehrzahl seiner Zeitgenossen war auch er nicht in der Lage, die Zahlenverhältnisse anders als zahlenmystisch zu erklären, wohl deshalb, weil Mersenne fest an eine der Welt inhärente *universale Harmonie* als göttliches Naturgesetz glaubte. Hellmut Ludwig schildert in *Marin Mersenne und seine Musiklehre* dessen Absichten:

> „Alles geschieht zum Lobe Gottes. Die Harmonie der Töne, der Zahlen, Gestirne und Sphären gipfelt schließlich in der höchsten Harmonie, in Gott selbst, denn auch die Musik ist letzten Endes nur dazu da, um zu dieser Erkenntnis zu führen."[25]

Deshalb sucht er nach neuen Möglichkeiten, die Verhältnistheorie auch unter den neuen physikalischen Bedingungen aufrecht erhalten zu können. In seiner *Harmonie universelle* greift Mersenne, der mit Beeckman bekannt war, die Koinzidenztheorie auf, freilich ohne explizit auf diesen zu verweisen[26]. Zunächst erweitert er Beeckmans Proportionalitätsbeziehung um die traditionellen Parameter Dichte, Querschnitt und Spannung der Saite und bestimmt ihre Abhängigkeiten. Mit Hilfe dieser Beziehung stellt er ein Gesetz zur Berechnung der absoluten Schwingungsfrequenzen auf, dem er eine Proportionalitätskonstante beifügt, die er experimentell mit $K = \frac{1}{2}$ bestimmt[27]:

$$v \sim \frac{1}{l}\sqrt{P/\varrho} \tag{2}$$

$$v = K \cdot \frac{1}{l}\sqrt{P/\varrho} \tag{3}$$

Die Schwingungsfrequenz v ist also umgekehrt proportional zur Länge l sowie dem Quadrat der Dichte pro Längeneinheit ϱ (wobei ϱ das Produkt aus der Dichte D und dem Querschnitt σ bildet) und proportional zum Quadrat der Spannkraft P.

---

[22] René Descartes. *Musicae Compendium*. S.27

[23] Radikal verfährt der holländische Mathematiker und Festungsbauer Simon Stevin: Seine Intervalle versuchen erst gar nicht, die *reinen* Intervalle zu approximieren, stattdessen seien seine abstrakten Halbtöne aus der 12. Wurzel aus 2 schlicht die *wahren* Konsonanzen.

[24] Zitiert aus: Hellmut Ludwig. *Marin Mersenne und seine Musiklehre*. S.20

[25] Ebd.. S.5

[26] „Ein Zeitgenosse [La Mothe-le-Vayer] nannte den Pater Mersenne, der ausgezeichnet die Kunst verstand, seine Bildung aus den Forschungen seiner Freunde zu bereichern, scherzhaft „den guten Dieb"." Hellmut Ludwig. *Marin Mersenne und seine Musiklehre*. S.8.

[27] Ebd. S.50 und Dostrovsky/Cannon. *Entstehung der musikalischen Akustik (1600-1750)*. S.27

Zur Überprüfung seines Gesetzes wendet Mersenne eine geschickte Skalierungsmethode an: Da Mersenne keine Möglichkeit sieht, die absoluten Frequenzen hörbarer Töne zu messen, experimentiert er mit Saiten unterschiedlicher Durchmesser und Materialien, die mehrere Meter lang sind. Diese gaben zwar keinen Laut von sich, stattdessen konnten dafür aber die „Schwingungen pro Sekunde mit Hilfe des Auges gezählt werden“[28]. Die Schwingungszahlen der Töne im hörbaren Bereich werden nun durch sukzessive Verkürzung (mit dem Faktor 2 pro Oktave) beziehungsweise Beschwerung (mit dem Faktor 4 pro Oktave) extrapoliert.
Durch seine Experimente mit der absoluten Frequenz und deren Mathematisierung kann Mersenne die Zahlenmystik beziehungsweise den „numerical formalism“[29], wie Peter Dear es nennt, ins neue Zeitalter der Empirie überführen, denn er beweist, dass die Frequenz als ein den materiellen Größen übergeordneter Parameter direkt mit der Tonhöhe identifiziert werden kann. Die Widersprüche der pythagoräischen Verhältnisse lassen sich auflösen, weil das Frequenzverhältnis der Oktave, egal wie man sie hervorbringt, immer 1:2 sein wird. Mersenne kann so durch die Koinzidenztheorie auch sein harmonisches Weltbild retten: Die Tonhöhe wird nur noch sekundär auf die saitenspezifischen Parameter bezogen; stattdessen liefert die Frequenz der Saitenschwingung eine direkte Beschreibung der Tonhöhe.
Mit Mersennes Gesetz erhält die Musiktheorie ein festes Maß für die Tonhöhe; die Frequenztheorie ermöglicht es, zukünfig von Materialeigenschaften und vor allem von Saiteninstrumenten zu abstrahieren und macht nun prinzipiell auch andere Instrumente ohne Saiten, zum Beispiel Blasinstrumente oder Glockenspiele, berechenbar, denn durch die Frequenztheorie hängt die theoretisch nicht mehr von der Saite und ihren Größen ab.

2.3.3 Der Anfang vom Ende der Proportionslehre

Obwohl die pythagoräischen Verhältnisse mit Hilfe der Koinzidenztheorie weiterhin als Erklärung für die Konsonanzen dienen konnten, hatte Mersenne als einer ihrer eifrigsten Befürworter durch seine Erkenntnisse selbst den größten Anteil an ihrem Untergang durch die Praxis. Das hing einerseits mit dem Problem der optimalen Stimmung zusammen, denn auch die Koinzidenztheorie konnte über die Probleme, die das didymische Komma[30] einer von der polyphonen Musikpraxis hervorgebrachten Stimmungstheorie bereitete, nicht hinwegtäuschen, weil reine Stimmungen prinzipiell keine Tonlagenwechsel gestatten.
Anders gesagt, zwischen Himmel und Erde oder Musiktheorie und Musikpraxis, bestand ein unüberbrückbarer Widerspruch. Gerade bei Mersenne jedoch, der so entschieden an den reinen Intervallen festhält, stellt sich eine bemerkenswerte Unterscheidung zwischen

[28] Sigalia Dostrovsky/John T. Cannon. *Entstehung der musikalischen Akustik (1600-1750)*. S.30
[29] Peter Dear. *Mersenne and the Learning of the Schools*. S.141 und S.150
[30] Bezeichnet den winzigen Unterschied von 12 Quinten zu 7 Oktaven, von Descartes *Schisma* genannt. Das didymische Komma macht Tonartenwechsel bei reinen Stimmungen unmöglich und eine Temperierung der Stimmung erforderlich.

Theorie und Praxis ein: Im anwendungsbezogenen Teil der *Harmonie Universelle* empfiehlt er ohne Zögern eine gleichverteilte Temperatur, wie sie Simon Stevin um 1585 vorgeschlagen hat[31].

> „Als eine solche Lösung sieht er das aus zwölf gleichen Halbtönen (sechs gleichen Ganztönen) bestehende System an. Den Vorzug dieser Einteilung erblickt er in der Befreiung von der durch Bevorzugung der reinen Konsonanzen und durch fortgesetzte mathematische Berechnungen gefundenen Unmenge von Intervallen. [...] Das Bedeutungsvolle an der Mersennschen Einteilung ist, daß er [...] die gleichmäßige Verteilung des entstehenden Fehlers durch die völlig gleichen Halbtöne fordert. Den großen Vorteil dieser Oktave erkannte er schon darin, daß man auf jedem Ton beginnen kann und nur immer dieselben Werte einzusetzen braucht.“[32]

An der temperierten, gleichschwebenden Stimmung scheiden sich also pythagoräische Harmonie und die Irrationalität des Reellen endgültig. Durch die zunehmende Anerkennung der gleichschwebenden Temperatur wird die Proportionslehre zu einem rein akademischen Gedankenspiel, das sich mit der Unvereinbarkeit mit der Welt der tatsächlichen Klänge abfinden muss.

Der zweite und endgültige Grund für den Untergang der Proportionslehre in der akustischen Wissenschaft liegt in der Möglichkeit zur absoluten Frequenzmessung und Mersennes empirischer Feststellung der Bandbreite menschlicher akustischer Wahrnehmung. Mit der Untersuchung des Hörbereichs erhält die geltende Unterscheidung der Musik in *ars* als mathematische Wissenschaft und *cantus* als ausführende Praxis eine neue Bedeutung, weil die Mathematik nun zu einer Physik wird. Hatte sich der praktizierende *cantus* zuvor der pythagoräischen Weltformel $n : (n-1)$ unterordnen müssen, beginnt die frühneuzeitliche *ars*, sich zunehmend an den tatsächlichen akustischen Phänomenen zu orientieren. So antizipieren Mersennes Arbeiten Sauveurs folgerichtige Aufteilung der Musiktheorie in eine Akustik und eine Musiklehre:

> „J'ai donc crû qu'il avoit une science supérieure à la Musique, que j'ai appellée *Acoustique*, qui a pour objet le Son en général, au lieu que la Musique a pour objet le Son en tant qu'il est agréable à l'ouïe.“[33]

Der Theoretisierung der Welt steht immer die Notwendigkeit praktischer Überprüfung gegenüber, und so entstehen durch die Wissenschaft nicht nur Weltanschauungen in Form von Schrift, Bild und Zahl, sondern als direkte Folge auch Medientechniken zur Erzeugung ihrer Gegenstände. War in der Antike das Monochord – der klingende Abakus – das kanonische Instrument für die *geometrische* Verhältnistheorie der Musik, so entwickelten sich in der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts ebenfalls Instrumente zur *chronometrischen* Geschwindigkeitstheorie der Musik, bei denen nicht wie bei der Technik Mersennes

[31] Albert Cohen. *Quantifying Music*. S.60

[32] Hellmut Ludwig. *Marin Mersenne und seine Musiklehre*. S.72 und S.74

[33] Albert Cohen. *Music in the French Royal Academy of Sciences*. S.24

jede einzelne kleine Wahrnehmung, nicht alle Rückschwünge sukzessive gezählt werden mussten, um die absolute Höhe eines Tons zu bestimmen. Der Engländer **Robert Hooke (1635-1703)** maß die absolute Frequenz, indem er die Zähne eines Zahnrads gegen ein Objekt anschlagen ließ. Die einzige Schwierigkeit einer solchen Methode war die, die Zähne dabei vorsichtig in genau gleichmäßiger Weise anschlagen zu lassen, weil sonst ein höchst unreiner Ton entstand. Wenn jedoch ein einigermaßen reiner Ton zustande kam, brauchte man lediglich die Zahl der Zähne mit der Zahl der Umdrehungen pro Minute zu multiplizieren, um die Frequenz des Tones zu erhalten. Neben Hooke konstruierten auch Taylor und Huygens Tonerzeuger, die Schwingungen mittels rotierender Zahnräder hervorbringen. Diese Vorgänger der Sirene[34] ändern je nach Rotationsgeschwindigkeit gleitend und exakt messbar ihre Tonhöhe.
Die abgeschlossene Welt der relativen *Tonhöhenverhältnisse* sieht sich nun einem *Tonkontinuum* gegenüber gestellt, das diese schlicht und einfach in sich auflöst, ebenso wie Simon Stevins Dezimalzahlen die Menge der Natürlichen und Rationalen Zahlen im kontinuierlichen Zahlenraum der Reellen Zahlen auflösen. Mit den neuen akustischen Tonerzeugern lassen sich große Teile diese Kontinuums stufenlos überstreichen und absolute Frequenzen mit hinreichender Genauigkeit einstellen. Sie sind allerdings kaum mehr fähig, musikalische Intervalle zu erzeugen, denn zum Musizieren waren sie schließlich nicht gedacht – zwar heißen die Tonerzeuger *Instrumente* wie ihre Vorgänger aus der Musikpraxis, nun jedoch im neuen Wortsinn wissenschaftlicher, und das heißt: hinreichend exakter, Messgeräte, die hier im besonderen zur Bestimmung absoluter Tonhöhen dienen.
Diese Instrumente dürfen mit Recht *futuristische* Instrumente genannt werden, sind diese doch nicht mehr organische Erzeugnisse aus Knochen, Häuten und Gedärmen, sondern anorganische Automaten: Die Reißzähne sind dem Zahnrad, die Saite dem Antriebs- oder Flachriemen gewichen. Nur der Federkiel erinnert bei Hooke noch an die Grundlage vergangener Instrumentenbautradition: den Raub am Opferanteil der Götter, aus dem die „Sache der Musen“ schließlich wird. Später wird auch dieser durch Metallzungen ersetzt werden.

2.4 Isochronie und Pendelbewegung

Die Identifizierung der Tonhöhe mit der Frequenz hat ein generelles Umdenken von geometrischen hin zu zeitlichen Größen zur Folge. Wenn die Frequenz die Tonhöhe bestimmt, muss man annehmen, dass „die Zeit, die eine Saite braucht, um eine Schwingungsperiode zu vollenden, immer die gleiche bleibt, unabhängig davon, ob die Erregung kräftig oder schwach ist oder ob die Schwingungen fast aufhören“[35]. Schwingungssysteme, die konstante Tonhöhen oder musikalische Töne hervorbringen, haben also alle die Eigenschaft, isochron zu schwingen, das heißt die Abnahme der Auslenkung muss pro-

[34] Die Lochsirene wurde von August Seebeck in den 1840er Jahren entwickelt und von dem Apparatebauer Rudolph König realisiert.
[35] Sigalia Dostrovsky/John T. Cannon. *Entstehung der musikalischen Akustik (1600-1750).* S.24

portional sein zur Abnahme der Geschwindigkeit. Im Pendel finden die Mathematiker des 17. Jahrhunderts ein anschauliches Modell für die schwingende Saite; dabei betrachten sie lediglich einen Massepunkt in der Saitenmitte, der orthogonal zu den Endpunkten der Saite schwingt. Galileo schreibt in den *Discorsi*:

> „Ein und dasselbe Pendel ... führt alle seine Schwingungen, lange, mittlere und kurze, in exakt der gleichen Zeit aus ... Vor allem anderen muß man beachten, daß jedes Pendel für seine Schwingungen eine so begrenzte und festgelegte Zeit hat, daß es unmöglich ist, es in irgendeiner anderen Periode schwingen zu lassen als in der einen, ihm natürlichen.“[36]

Das Phänomen der Isochronie resultiert also aus der Eigenfrequenz des schwingenden Körpers und markiert den Ausgangspunkt zur Beschreibung der Bewegungsmöglichkeiten der schwingenden Saite anhand vereinfachter beziehungsweise idealisierter Schwingungssysteme.

Christiaan Huygens (1629-1695) nahm aufgrund des Satzes von der Erhaltung der Energie (in einem mechanischen System) an, „daß jeder Punkt der Saite in die Ruhelage zurückversetzt wird durch eine Kraft, die der Größe der Auslenkung aus der Gleichgewichtsachse entspricht, eine Annahme, die hier als Pendelbedingung bezeichnet werden soll“[37]. Da er zusätzlich davon ausging, alle Punkte würden die Gleichgewichtsachse stets gleichzeitig durchschreiten, konnte der die Schwingung der Saite zu einer Pendelschwingung vereinfachen. Huygens Analyse scheitert allerdings am unzureichenden mathematischen Handwerkszeug der Zeit.

Ebenso beschränkt der große Mathematiker der *Académie Royale* und Vater der Akustik, **Joseph Sauveur (1653-1716)**, das Problem der Schwingungen auf ein System mit nur einem Freiheitsgrad, indem er annimmt, eine musikalische Saite schwinge wie eine Schaukel[38]. Mit diesem Modell gelang Sauveur zumindest die Ableitung des Merseneschen Gesetzes mit einer recht realitätsnahen Konstante $K = \sqrt{1}0/2\pi \approx \frac{1}{2}$.

Die ersten sinnvollen mathematischen Beschreibungen der Grundschwingung werden jedoch erst mit der Verbreitung der Differentialrechnung möglich. Den ersten Vorstoß bildet der Ansatz von **Brook Taylor (1685-1731)** aus dem Jahr 1712. Dieser reformuliert Newtons drittes Kraftgesetz („die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung“[39]) aus der *Principia mathematica philosophiae naturalis* von 1687 und macht es so für die Schwingungstheorie fruchtbar. Aus[40]

$$F \cdot \Delta t = \Delta(m \cdot v) \tag{4}$$

beziehungsweise[41]

$$F = ma = m\ddot{y} \tag{5}$$

[36] Galileo Galilei. *Discorsi*, Opere VIII, S.139. Zitiert aus: Dostrovsky/Cannon, S.26

[37] Ebd.. S.50

[38] Ebd.. S.50/51

[39] Isaac Newton. *Mathematische Prinzipien der Naturlehre*. S.32. Zitiert aus: Wolfgang Schreier. *Geschichte der Physik*. S.165

[40] Wolfgang Schreier. *Geschichte der Physik*. S.165

[41] Roland Hecker. *Zur Geschichte des akustischen Tones*. S.19

entwickelt Taylor 1712 die Beziehung[42]

$$P\chi = -a^{-1}\varrho y, \tag{6}$$

wobei die Auslenkungskraft der Spannung in der Saite P und der Krümmung χ am Massepunkt der Rückstellkraft der lineren Dichte ϱ entspricht. Durch einen korrekten Wert von a kann er aus seiner Pendelbedingung Mersennes Gesetz entwickeln und somit beweisen. Er schreibt:

> „The ancients supposed it, and it has now been demonstrated, that if a string of a uniform thickness be stretched by a given force, the swiftness with which any part of it virbrates is reciprocally proportional to the length of that part.“[43]

Die Lösung der Differentialgleichung führt Taylor weiter zur richtigen Beobachtung, dass die Grundschwingung der Saite durch eine Sinusfunktion beschrieben werden kann. Da Taylor jedoch von der falschen Annahme ausging, die größte Auslenkung müsse sich immer in Saitenmitte befinden, konnte er keine höheren Teilschwingungen angeben:

$$y(z) = c \cdot sin\frac{\pi z}{l} \tag{7}$$

Die reine Sinusförmigkeit der Saitenschwingung, wie Taylor sie darstellt, gilt nur in Sonderfällen, beispielsweise wenn durch Resonanz nur die Grundschwingung einer Saite erregt wird. Für das Anreißen oder Streichen von Saiten gilt diese Überlegung nicht, weil diese dann Obertöne produziert. Es sollte noch mehr als zwanzig Jahre dauern, ehe die Schwingungsbewegung der gespannten Saite vollständig, und das heißt: mit allen ihren Obertönen, angegeben werden konnte.
Die wichtigsten Eigenschaften des Tons – Isochronie und sinusförmige Bewegung – manifestieren sich bei Taylor dennoch erstmals in einer formalen mathematischen Aussage; eine Aussage, die wesentlich dazu betrug, akustische Phänomene nicht mehr als eine diskrete Folge von *Tonstößen und Pausen*, sondern vielmehr als *Wellenbewegungen* zu begreifen.

[42]Sigalia Dostrovsky/John T. Cannon. *Entstehung der musikalischen Akustik (1600-1750).* S.51

[43]Brook Taylor. *Of Music.* Brook Taylor Collection. Zitiert aus: Dostrovsky/Cannon. *Entstehung der musikalischen Akustik (1600-1750).* S.53

3 Klangfarbe oder Geschichte des Musikalischen Tons

Die Klangfarbe erfasst, was zwei Musikalische Töne beziehungsweise Klänge derselben Tonhöhe qualitativ voneinander unterscheidet; welchen Charakter oder Spektralgehalt ein Schallereignis aufweist. Klangfarben bestimmen, wie Klänge dem Ohr erscheinen: ob als *leer* oder *voll*, als *scharf* und *spitz* oder *weich* und *dumpf*, als *klangvoll* oder *geräuschhaft*. Die musiktheoretische Vorstellung einer *Farbigkeit* von Klängen entwickelt sich aus der Beobachtung, dass eine schwingende Saite neben dem Grundton noch mehrere höhere Nebentöne produziert. Daran knüpft sich die Vermutung, dass dieses Phänomen eine Erklärung für den unterschiedlichen Charakter der Klänge respektive Instrumentengruppen sein könnte. Um 1700 versucht man deshalb, die Schwingungen der musikalischen Saite mathematisch zu beschreiben, um Erklärungen für das Zustandekommen der Obertöne zu finden.

3.1 Das Paradox der Obertöne

Der Erste, der die Existenz der Obertöne gespitzten Ohres bemerkt hat, scheint Mersenne gewesen zu sein: In seiner 1637 veröffentlichten *Harmonie Universelle* stellt er fest, dass eine angezupfte leere Saite nicht nur mit der Frequenz schwingt, die mit ihrer Länge korreliert, sondern zusätzlich zahlreiche höhere Nebentöne hervorbringt. Eine Analyse dieser Nebentöne ergibt, dass diese den ganzzahligen Vielfachen der Grundschwingung entsprechen und so mit den Intervallen übereinstimmen, wie sie von der Trompete durch Überblasen hervorgebracht werden.

> „Die schwingende und tönende leere Saite erzeugt mindestens fünf verschiedene Töne zur gleichen Zeit, deren erster der natürliche Ton (Grundton) der Saite ist. ... Diese Töne folgen den Verhältnissen der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, weil man vier Töne hört, die vom natürlichen [Ton sich] unterscheiden: der erste klingt eine Oktave höher, der zweite eine Duodezime, der dritte eine Quintadezime und der vierte eine große Septimadezime ... Außer diesen vier extraordinären Tönen höre ich sogar noch einen fünften, [...] er bildet die große Vicesima zum natürlichen Ton.
>
> [Da die Saite] dann fünf oder sechs Töne erzeugt ... scheint es ganz und gar notwendig, daß sie die Luft fünf-, vier-, drei- und zweimal in derselben Zeit schlägt, in welcher sie sie einmal schlägt, was man sich unmöglich vorstellen kann, wenn man nicht sagt, daß die halbe Saite sie zweimal schlägt, während die ganze Saite sie einmal schlägt, und daß in derselben Zeit das Drittel, Viertel und Fünftel der Saite sie drei-, vier- und fünfmal schlagen, was der Erfahrung widerspricht, die deutlich zeigt, daß alle Teile der Saite die gleiche Anzahl von Rückkehren in dergleichen Zeit ausführen, weil die ganze Saite, da sie kontinuierlich ist, nur eine einzige Bewegung hat, auch wenn sich diese Teile in dem Maße langsamer bewegen, als sie den Stegen näher kommen.“[44]

[44] Sigalia Dostrovsky/John T. Cannon. *Entstehung der musikalischen Akustik (1600-1750).* S.39

Mersenne - und nicht nur ihm - stellt sich die Existenz der Obertöne jedoch als Paradox dar, denn er fragt zu Recht, wie die Saite in der Lage sein könne, Obertöne zu produzieren, wo sie doch nur eine Bewegung auf einmal machen könne und nicht mehrere zur gleichen Zeit. Diese Verwunderung steht am Beginn einer Klangfarbentheorie, die sich über zweihundert Jahre fortschreiben wird, bis Fourier sie schließlich berechenbar macht und Helmholtz sie experimentell visualisiert.
Die Frage, die sich an Mersennes Problem anschließt, ist folgende: Wie schwingt die leere Saite tatsächlich und könnte die Kenntnis der Schwingungsform der Saite Aufschluss darüber geben, wie die Obertöne entstehen können? Und wie um Mersennes Frage zu beantworten, nahm man sich in der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts verstärkt in Versuchen dieses Problems an, die Bewegung von schwingenden Saiten zu verstehen und zu beschreiben.

3.1.1 Experimentelle Demonstrationen von Obertönen

An erster Stelle der Untersuchungen stand zunächst die Aufgabe, die Existenz der Obertöne überhaupt als physikalische Tatsache zu etablieren. Nach Mersennes Hinweis entwickelten sich unterschiedliche Verfahren, mit denen sich die Obertöne experimentell demonstrieren ließen.
Der englische Physiker **John Wallis (1616-1703)** berichtet 1667 in den *Philosophical Transactions* der Royal Society von einer Versuchsreihe mit Papierreitern, die er auf einer Saite anordnete. Durch sie konnte er zeigen, dass sich eine schwingende Saite in mehrere schwingende Abschnitte aufteilen kann, zwischen denen jeweils Punkte entstehen, die sich in Ruhelage befinden. Wallis erklärt die Obertöne damit, dass sich die Saite analog zu den Vielfachen der Grundfrequenz in mehrere schwingende Abteilungen teilt, die durch Ruhepunkte getrennt werden und zeigt, dass höhere Teiltöne nachgewiesen werden können, indem man eine leere Saite nicht vollständig an einem Punkt abteilt, sondern sie beim Anzupfen lediglich leicht berührt. Die Existenz dieser schwingenden Abteilungen ist in England außerdem von William Noble und Thomas Pigot nachgewiesen worden[45]. Die Papierreiter-Methode zeigt, analog zu Mersennes intuitiver Vermutung, dass eine Saite tatsächlich in der Lage ist, in ganzzahligen Vielfachen ihrer Eigenfrequenz zu schwingen, indem man sie durch das Antippen an den geometrischen Teilungspunkten dazu bringt, sich in schwingende Bereiche und Ruhepunkte aufzuteilen.
Joseph Sauveur (1653-1716) demonstriert das Schwingungsverhalten der Saite, indem er ihre Obertöne durch Resonanzen beziehungsweise sogenanntes *Mittönen* anregt oder - ebenso wie die englischen Vorgänger - durch das kurze Auflegen eines Fingers beim Anreißen der Saite. 1701 tauft er die Teiltöne eines musikalischen Tons die *Harmonischen* der Grundschwingung (*sons harmoniques*) und führt in seinen *Principes d'acoustique et de musique* außerdem die Begriffe Schwingungsknoten (*nœud*) und Schwingungsbauch (*ventre*) als Bezeichnung für die Ruhepunkte beziehungsweise die schwingenden Abtei-

[45] Ebd.. S.45

lungen ein[46]. Die Schwingungsknoten können als praktischer Beweis für die Existenz der Obertöne gelten, denn sie zeigen, dass sich die Eigenfrequenz der Saite auch auf ihre Vielfachen erweitern lässt.
Sauveur, im Kindesalter durch eine Erkrankung fast ertaubt, war ein Kenner des Orgelbaus. Orgelpfeifen halfen ihm nicht nur bei der Bestimmung absoluter Frequenzen, sondern machten ihn außerdem auf eine ganz andere Weise als Mersenne mit dem Phänomen der Obertöne vertraut: Da tieffrequente Orgeltöne dem Ohr das Heraushören der Tonhöhe erschweren, behalfen sich die Konstrukteure durch das Hinzufügen künstlicher Obertöne in Form kleinerer Pfeifen, die mit Frequenzen ganzzahliger Vielfache des Basstons ganz nach Mersennes Beobachtung erklangen[47]. Denn im Fall der harmonischen oder natürlichen Obertonreihe sei dem Ohr die Folge Oktave, Duodezime, Quintadezime (oder doppelte Oktave), Septimadezime (oder großer Terz über der doppelten Oktave) und Vicesima (oder Quinte über der doppelten Oktave) so „natürlich“, dass das Ohr auf den Grundton rückschließen kann. Diese höheren Nebentöne nannte Sauveur die n-ten Harmonischen beziehungsweise die $(n-1)$-ten Obertöne des Grundtons[48].

3.1.2 Die praktische Bedeutung der Obertöne

Neben den Demonstrationen der Obertöne finden sich auch Erklärungen der praktischen Bedeutung der Obertöne, indem Verbindungen zwischen dem Obertongehalt eines Klanges und dessen Klangcharakter beziehungsweise Wirkung hergestellt werden. Mersenne unterschied die Klänge schlicht nach begrifflichen Klangqualitäten: „Diese können zum Beispiel sein: herb, scharf, rauh, weich, klar, gedämpft, usw.“ [49]
Sauveur kommt über die Beschäftigung mit der Theorie der Obertöne und der Praxis des Orgelbaus zu der Erkenntnis: Es sind die *Mischungen der Obertöne*, die die Klangfarbe bestimmen. In der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts setzt sich daraufhin langsam das Verständnis durch, dass der spezifische Klangcharakter eines Instruments vom Obertongehalt abhängig ist. In seiner *Application des sons harmoniques a la composition des jeux d'orgues* von 1702 bringt Sauveur die Harmonischen mit der Klangfarbe in Verbindung und vergleicht diese mit Geschmacksrichtungen, die ein Koch zum Zubereiten von Gerichten verwendet und den Mischfarben, die ein Maler auf seiner Palette aus Grundfarben herstellt:

> „Die Organisten beginnen damit, ihre Orgel kennenzulernen, d. h. die Register und die besondere Wirkung der Mischung dieser Register; denn obwohl die Mischungen derselben Register fast dieselbe Wirkung hervorrufen, bleibt immer ein gewisser Unterschied, der den Organisten dazu bringt, sie fast genauso zu mischen wie Maler ihre Farben herstellen; und jeder hat oft seinen eigenen Geschmack. Es gibt jedoch

[46] Ebd.. S.46
[47] Joseph Sauveur. *Application des sons harmoniques a la composition des jeux d'orgues.*
[48] Vgl. Dostrovsky/Cannon. *Entstehung der musikalischen Akustik (1600-1750).* S.44
[49] Mersenne. *Harmonie Universelle*, Nat. du Son, XVI, 29. Zitiert aus: Hellmut Ludwig. *Marin Mersenne und seine Musiklehre.* S.47/48

> allgemeine Regeln, die diese Mischungen bestimmen. Die erste ist die, daß in all diesen Mischungen die Töne der Orgelpfeifen, die zu derselben Taste gehören, Harmonische sein müssen, so daß man eine zufällige Abweichung davon wie eine Art Dissonanz betrachten muß. Die zweite die, daß man nicht unterschiedslos alle Register zieht, die zu jeder Taste harmonische Töne erzeugen; vielmehr richtet man sich 1. nach dem Charakter des Stückes, das man spielt. . . und 2. nach dem Geschmack und der Laune des Organisten, der wie der Koch seine Ragouts milder oder schärfer liebt.“[50]

So lässt sich die Orgel als Apparat zur Klangfarbenherstellung, wie sie von Sauveur vorgestellt wird, als Frühform additiver Synthesizer im eigentlichen Wortsinne denken: Durch die Möglichkeit, mittels der Register spezifische Obertongemische realisieren zu können, wird der Klangcharakter verschiedener Instrumente, wie zum Beispiel der Trompete, nachgeahmt.

3.2 Die Mathematisierung der Obertöne schwingender Saiten

Mersennes Gesetz war darauf ausgerichtet, Frequenzen von Grundschwingungen aus gegebenen Werten von Saiteneigenschaften zu berechnen oder umgekehrt zu bestimmen, welche Werte die einzelnen Parameter annehmen können, wenn eine bestimmte Tonhöhe erreicht werden soll. Die Schwingungsform der Grundschwingung oder anders gesagt – der Lauf ihrer Amplitude über die Zeit – ist von Taylor als sinusförmig erkannt worden. Nach den experimentellen Nachweisen der Obertöne beginnt ab 1700 die Suche nach allgemeinen Modellen, die zeigen, wie obertonbehaftete Schwingungen entstehen, welchen Verlauf ihre Bewegungen nehmen und durch welche Größen diese bestimmt sind. Das primäre Studienobjekt der Mathematisierung gibt einmal mehr die schwingende Saite ab.

3.2.1 D'Alembertsche Wanderwellen

Jean-Baptiste Le Rond d'Alembert (1717-1783) findet 1846 auf rein mathematischem Wege über die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\delta^2 y}{\delta t^2} = c^2 \frac{\delta^2 y}{\delta x^2} \tag{8}$$

ein erweitertes Modell für die Saitenschwingung: Die vor dem Anzupfen ausgelenkte Saite bildet zunächst eine dreieckige Form zwischen Saitenenden und Anreißpunkt. Von diesem Punkt aus wandern nach dem Loslassen der Saite zwei Wellenzüge jeweils zu den äußeren Stegen und wieder zurück,[51]

[50] Joseph Sauveur. *Application des sons harmoniques à la composition des jeux d'orgues.* S.316-36
[51] Jean-Baptiste d'Alembert. *Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration.*

$$y(x,t) = y_1(x+ct) + y_2(x-ct), \tag{9}$$

wobei für y_1 und y_2 beliebige Funktionen gewählt werden können. Bei d'Alembert vollzieht sich ein grundlegender Wechsel in der mathematischen Herangehensweise: Ausgehend von den Grundprinzipien der Dynamik konstruiert er das Verhalten von Schwingungssystemen auf rein mathematischem Wege. "Es wurde möglich, dynamische Gleichungen zu finden, die mechanische Systeme prinzipiell beschreiben, ehe man etwas über vorhandene Bewegungen weiß oder annimmt."[52]
Der d'Alembertsche Ansatz ermöglicht denn auch die Verallgemeinerung des Mersenneschen Gesetzes auf beliebige Schwingungssysteme, wie zum Beispiel Röhren und andere schwingende Körper.

3.2.2 Bernoullis Superpositionsprinzip

Die Baseler Mathematiker **Daniel Bernoulli (1700-1782)** und **Leonhard Euler (1707-1783)** schärfen ihr mathematisches Handwerkszeug zunächst nicht an der schwingenden Saite, sondern an einem einseitig befestigten, frei herabhängenden Faden, der auch als *hängende Kette* bezeichnet wird. 1853 löst Bernoulli das Obertonproblem der Saite durch die Erarbeitung einer eigenständigen Lösung der d'Alembertschen Wellengleichung. Er beantwortet Mersennes Frage folgendermaßen: Die Grundschwingung der Saite schwingt von der Zupfposition bis zur maximalen Auslenkung hin und her, kleinere Schwingungen mit rasch abnehmender Amplitude bilden sich relativ zur jeweiligen Saitenposition aus. Der Obertongehalt eines Klangs kann somit als Summe oder *Überlagerung der einfachen Teiltöne* begriffen werden. Diese schwingende Koexistenz aller Obertöne bezeichnet Bernoulli als *Superpositionsprinzip.* Mathematisch führt Bernoullis Lösung den Taylorschen Ansatz fort – der entscheidende Unterschied gegenüber der Taylor-Formel besteht im kleinen Index n, der für das gleichzeitige Anwesen der Obertöne im Gesamtklang steht:

$$y(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(\frac{n\pi v(t-\tau_n)}{l} \sin\frac{n\pi z}{l}) \tag{10}$$

Mit dem heute als Separationsansatz bekannten Verfahren konnte er die partielle in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen aufteilen, von denen die erste die Ortsvariable $X(x)$ und die zweite den Zeitverlauf $T(t)$ der Welle darstellt[53]:

$$y(x,t) = [A_1 \sin(kx) + B_1 \cos(kx)] \cdot [a_1 \sin(\omega t) + b_1 \cos(\omega t)] \tag{11}$$

[52]Sigalia Dostrovsky/John T. Cannon. *Entstehung der musikalischen Akustik (1600-1750).* S.68

[53]Vgl. Roland Hecker. *Zur Geschichte des akustischen Tones.* S.20; Bronstein et al.. *Taschenbuch der Mathematik.* S.414

Durch die Erweiterung dieser Lösung um den Faktor n werden alle Harmonischen erfasst:

$$y(x,t) = X(x) \cdot T(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \{[A_n \sin(nkx) + B_n \cos(nkx)] \cdot [a_n \sin(n\omega t) + b_n \cos(n\omega t)]\} \quad (12)$$

Bernoulli behauptete in der Folge richtig, dass nicht nur schwingende Saiten, sondern auch beliebige andere Schwingungssysteme zusammengesetzte, eben *überlagerte* Schwingungsphänomene seien und dass deshalb alle auch in einfache Sinusschwingungen zerlegbar sein müssten. Aus dieser Behauptung entbrannte jedoch ein heftiger Streit zwischen Bernoulli selbst, Euler, d'Alembert und Louis Lagrange, weil letztere sich nicht vorstellen konnten, dass beliebig komplexe und mit Unstetigkeiten behaftete Schwingungsformen vollständig durch überlagerte Sinusschwingungen approximierbar sein sollten.

So gelang es letztendlich niemandem im 18. Jahrhundert, die Amplituden der Obertöne von beliebigen Schwingungsformen rechnerisch zu bestimmen – dieses Verdienst sollte erst Fourier zukommen. Roland Hecker konstatiert in seiner *Geschichte des akustischen Tones* knapp: „Die Zeit für die Verallgemeinerung war anscheinend noch nicht reif.“[54]

3.3 Mathematische und experimentelle Spektroskopie

3.3.1 Fouriers Theorem der Harmonischen Analyse

1822 veröffentlichte der französische Mathematiker **Jean Baptiste Joseph de Fourier (1768-1830)** zum ersten Mal seine Arbeit mit dem unscheinbaren Titel *La Théorie Analytique de la Chaleur*. In ihr geht er von Anfang an von der Vorstellung aus, dass beliebige periodische Schwingungsformen in eine Reihe von einfachen Schwingungen unterschiedlicher Frequenzen und Stärken zerlegbar seien. Analog zu einem Alphabet oder dem Periodensystem der chemischen Stoffe denkt sich Fourier komplexe Schwingungsphänomene als aus unteilbaren *Elementen* aufgebaut.
Im Vorwort beklagt sich Fourier zunächst über fehlende analytische Verfahren, um „mathematisch alle Wirkungen der Wärme umfassende Gesetze“ zu beschreiben, verspricht aber sogleich Abhilfe:

> „Die strahlende Wärme, die den Körpern durch ihre Oberflächen zukommt, oder entflieht und die elastischen Flüssigkeiten oder den luftentleerten Raum durchsetzt, folgt ganz besonderen Gesetzen und trägt zu den verschiedenartigsten Erscheinungen bei. Für viele dieser Erscheinungen kannte man die physikalische Erklärung schon lange, die von mir entwickelte mathematische Theorie zeigt aber, wie man sie exact zu messen vermag.“[55]

[54] Roland Hecker. *Zur Geschichte des akustischen Tones.* S.20/21
[55] Ebd.. S.X

Über die Verallgemeinerbarkeit seines für die Wärmetheorie entwickelten Verfahrens war er sich durchaus im Klaren, denn er schreibt selbstbewusst:

> „Ich habe mir vorgenommen, in diesem Werke die mathematischen Gesetze, welchen die Verbreitung der Wärme gehorcht, zu entwickeln und glaube, dass die nachfolgende Theorie einen der wichtigsten Zweige der ganzen Physik ausmachen wird.“[56]

Diese Arbeit fernab von aller Akustik, die eine Mathematisierung von Temperaturschwankungen vorstellte, sollte in der Folge nicht nur für die Akustik, sondern tatsächlich für die gesamte Physik wegweisend werden. Denn mit Fouriers *Harmonischer Analyse* ließen sich periodische Veränderungen aller Art berechnen, also zum Beispiel auch Saitenschwingungen und damit verbundene Luftdruckschwankungen:

> „Dieselben Theoreme, die uns die Integrale der Differentialgleichungen für die Wärmebewegung kennen lehren, lassen sich auch unmittelbar auf Fragen der Analysis überhaupt und auf Probleme der Dynamik anwenden, deren Lösung man lange vergeblich gesucht hat.“[57]

Sie liefert für eine einfache Sinusschwingung (Fourier führt als vereinfachtes Beispiel die periodische Schwankung der Temperatur zwischen Tagen und Nächten an) einen – und das heißt: genau einen – Wert für die Frequenz und einen Koeffizienten für ihre Stärke oder Amplitude. Für ein Tongemisch, also zum Beispiel einen Klang, der aus einem Grundton und mehreren Obertönen besteht, so wie Mersenne und Sauveur sie untersucht hatten, erhält man als Ergebnis der Fourier-Analyse sowohl die Amplitudenwerte für die Grundschwingung als auch für alle vorhandenen Obertöne (mit $n = 1, 2, 3, ...$).

$$\begin{aligned} y(t) &= a_0 \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \sin(n\omega t) + b_n \cos(n\omega t)] \qquad (13) \\ &= a_0 \sum_{n=1}^{\infty} [c_n \sin(n\omega t) + \phi_n] \end{aligned}$$

Die entsprechenden Koeffizienten werden bestimmt durch die Integrale:[58]

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} y(t) dt \qquad (14)$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} y(t) \sin(n\omega t) dt \qquad (15)$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} y(t) \cos(n\omega t) dt \qquad (16)$$

[56] Joseph de Fourier. *Analytische Theorie der Wärme*. S.VII
[57] Ebd.. S.XIII
[58] Roland Hecker. *Zur Geschichte des akustischen Tones*. S.23/24

Mit den Koeffizienten lassen sich, und das ist das entscheidende, in der Reihenentwicklung alle Amplituden der höheren Teilschwingungen exakt angeben. Alle Reihen, die mit Hilfe dieser Koeffizienten entwickelt werden können, enthalten nur sinusförmige Schwingungen, die sich in bezug auf Stärke und Frequenz unterscheiden. Fourier schreibt:

> „Daraus folgt hinsichtlich der Entwicklung von Functionen in trigonometrischen Reihen, dass, wenn man den Verlauf einer Function f(x), deren Werte in einem bestimmten Intervall x = 0 bis x = X alle gegeben sind, durch eine Curve darstellt, man stets diese Function [...] in eine Reihe entwickeln kann, die entweder nur Sinusse oder nur Cosinusse oder Sinusse und Cosinusse, aber weiter nichts enthält.“[59]

Und weiter:

> „Eine solche Auffassung verstösst nicht gegen die allgemeinen Principien der Analysis, man findet ihre Grundlagen sogar in den Arbeiten von Daniell, Bernouilly, Clairaut, La Grange und von Euler. Inzwischen hat man es doch früher offenbar für ganz unmöglich gehalten, Functionen durch Sinusse und überhaupt durch trigonometrische Reihen darzustellen, bei denen die Variabeln nicht aus einem gewissen Intervall heraustreten durften, ohne dass dieselben sich sofort auf Null reducirten. Aber jetzt kann wohl kein Zweifel mehr herrschen, das jene Unmöglichkeit tatsächlich nicht vorhanden ist, man kann Teilfunctionen ganz streng durch convergente trigonometrische Reihen oder durch bestimmte Integrale ausdrücken.“[60]

Im Hinblick auf akustische Probleme offenbart die Fourier-Analyse die genaue Obertonstruktur eines Zusammenklangs. So bedeutet Fouriers Theorem praktisch nichts weniger als die Möglichkeit, die Qualitäten unterschiedlicher Instrumentenklänge in Form spezifischer Frequenzspektren darzustellen – vorausgesetzt, man kann die Form ihrer Schwingungen mathematisch angeben.

3.3.2 Helmholtz’ experimentelle Spektroskopie

Georg Simon Ohm (1787-1854) kannte die Veröffentlichungen Fouriers und übertrug sie auf speziell akustische Probleme. 1843 formulierte er die Behauptung, eine Fourier-Analyse stelle die mathematische Analogie zur Funktionsweise des Gehörs dar: Um Klangfarben unterscheiden zu können, müssten die komplexen Geräuscheindrücke notwendig von den sensorischen Organen im inneren Ohr in eine Menge elementarer Schwingungen zerlegt werden, um dann neuronal weiterverarbeitet werden zu können.[61]

[59] Joseph de Fourier. *Analytische Theorie der Wärme*. Zitiert aus: Roland Hecker. *Zur Geschichte des akustischen Tones*. S.24.

[60] Joseph de Fourier. *Analytische Theorie der Wärme*. S.451.

[61] Georg Simon Ohm. *Ueber die Definition des Tones nebst daran geknüpfter Theorie der Sirene und ähnlicher tonbildender Vorrichtungen.*

Diese Analogie wurde später durch **Hermann Ludwig Ferdinand v. Helmholtz (1821-1894)** als *Ohmsches Gesetz der Akustik* bekannt, nachdem dieser zeigen konnte, dass das Gehör tatsächlich wie ein Fourieranalysator arbeitet. Mit der 1863 erschienenen *Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik* entstand das erste umfassende Standardwerk zur Akustik, in dem akustische Mathematik, physiologische Vorgänge des Gehörs und experimentelle Demonstrationen akustischer Phänomene auf eine allgemein verständliche und anschauliche Basis gestellt wurden. Teilweise werden die Versuche mit Hilfe der Harmonischen Analyse nach Fourier gegengerechnet: Leser, denen es an mathematischen Kenntnissen fehle, verweist er augenzwinkernd auf das Werk *On Sound* seines englischen Zeitgenossen John Tyndall. Helmholtz führt eine strikte mathematische Trennung zwischen dem Ton und dem Klang beziehungsweise zwischen akustischem und musikalischem Ton ein:

> „Wenn die Lufttheilchen während einer jeden Schwingungsperiode sich genau in derselben Weise einmal hin und her bewegen, wie der Schwerpunkt eines Pendels bei einer sehr kleinen Bewegung es thut, so hören wir nur einen einfachen und einzigen Ton, dessen musikalische Höhe durch die Anzahl der gleichen Perioden bestimmt ist, die in einer Secunde enthalten sind. In diesem Falle ist sowohl die Geschwindigkeit wie der Druck der Luft in jedem einzelnen Punkte der schwingenden Luftmasse einfach mathematisch auszudrücken durch einen Ausdruck von der Form $A \cdot sin(2\pi nt + c)$. [...] Wenn aber die Luftbewegung während der einer Schwingungsperiode nicht dem einfachen Gesetzte der Pendelbewegung folgt, sondern einem beliebigen anderen Gesetze, so hört man bei gehörig gerichteter Aufmerksamkeit der Regel nach mehrere Töne, selbst wenn die Luftbewegung nur von einem einzigen tönenden Körper hervorgebracht wird. Nun kann nach dem bekannten Theorem von Fourier eine jede periodische Bewegung der Luft mathematisch ausgedrückt werden durch eine Summe von Gliedern, deren jedes von der Form $A \cdot sin(2\pi mt + c)$ ist, und also einer einfachen pendelartigen Schwingung der Lufttheilchen entspricht. In diesem Ausdrucke sind A und c abhängig vom Werthe von m, und m durchläuft die Werthe n, 2n, 3n, 4n, u.s.w., wo n wieder wie früher die Zahl der einfachen Perioden in der Sekunde bedeutet.“[62]

Sich die von Klängen hervorgerufene Luftbewegung als Summe einfacher Schwingungen der Luftteilchen vorzustellen, bezeichnet Helmholtz als eine „mathematische Fiction“[63]; er findet jedoch durch Umwandlungs- und Übertragungsprozesse Wege, solche zusammengesetzte Schwingungen in ihre Bestandteile zu zerlegen und damit in praktischer Weise harmonisch zu analysieren. Helmholtz analysiert Klänge, indem er das *Phänomen der Resonanz* ausnutzt. Resonanz bedeutet, dass man einen Körper in Schwingung versetzen kann, indem man Schwingungen in der Eigenfrequenz des Körpers von außen auf diesen überträgt.

> „Geben Sie bei einem gut gestimmten Clavier die Vocale a, e, i, o, u, ä, ö, ü, a° kräftig gegen den Resonanzboden, so klingen ganz deutlich auf den Saiten diese Vocale nach.“[64]

[62] Hermann v. Helmholtz. *Wissenschaftliche Abhandlungen*. XIX. Ueber die Vocale. S.397/398
[63] Ebd.. S.398
[64] Ebd.. S.395

Helmholtz bezeichnet die akustische Resonanz als *Mittönen*, durch das er in seinem Vortrag *Ueber die physiologischen Ursachen der musikalischen Harmonie* die Fähigkeit des Gehörs zur Fourieranalyse begründet:

> „Sie werden Alle schon an musikalischen Instrumenten, namentlich an Saiten, das Phänomen des Mittönens wahrgenommen haben. Die Saite eines Pianoforte zum Beispiel, deren Dämpfer man aufgehoben hat, geräth in Schwingung, sobald ihr eigener Ton in der Nähe und stark genug angegeben wird. Hört der erregende Ton auf, so hört man denselben Ton auf der Saite noch eine Weile nachklingen. Legt man Papierschnitzelchen auf die Saite, so werden sie abgeworfen, sobald ihr Ton angegeben wird. Das Mittönen der Saite beruht darauf, dass die schwingenden Lufttheilchen gegen die Saite und ihren Resonanzboden stossen. [...]
>
> Denken Sie sich nun mehrere menschliche Stimmen oder Instrumente in der Nähe ertönend, so werden die Schnitzel von allen denjenigen und nur von denjenigen Saiten abfliegen, deren Ton angegeben wird. Sie sehen, dass also auch das Clavier das Wellengewirre der Luft in seine einzelnen Bestandtheile auflöst. Was in unserem Ohr in demselben Falle geschieht, ist vielleicht dem eben beschriebenen Vorgange im Clavier sehr ähnlich.“[65]

Wenn man die Saiten eines Flügels also mit Papierschnitzelchen bestückt und einen Klang vermittels Resonanz auf diesen überträgt, ergibt sich ein *Bild der Obertonstruktur* des Klanges – also das, was man heute eine *scientific visualization* nennt. Mit der Helmholtzschen Visualisierungsmethode lässt sich mit bloßem Auge feststellen, aus welchen Tönen die hineingesungenen oder -gespielten Klänge aufgebaut sind. Und zwar erhält man – technisch gesprochen – eine Frequenzanalyse mit einer Frequenzgruppenbreite oder Auflösung im Halbtonabstand. Helmholtz hat also entsprechend der neuen akustischen Dimension der *Klangfarbe* beziehungsweise des *Spektralgehalts* musikalischer Töne das *Monochord* gegen das *Polychord* Klavier eingetauscht, weil er so die Zusammensetzung von Klängen nicht nur *hören*, sondern auch *sehen* kann.

Mit Hilfe der Piano-Spektroskopie lässt sich also auf einen Blick erkennen, welche Partialtöne in einem Klang enthalten sind – wie sich allerdings die Intensitäten dieser einzelnen Teiltöne zueinander verhalten, kann man mit ihr nicht angeben. Diese Intensitäten entsprechen jedoch den Fourierschen Koeffizienten a_n und b_n und erst durch ihre Mischung ergeben sich die spezifischen Klangfarben. Helmholtz erhält die Intensitäten einzelner Partialtöne, indem er diese aus dem Gesamtklang herausisoliert. Zu diesem Zweck ließ Helmholtz ein Set aus gläsernen, kugelförmigen Kolben anfertigen. Jeder dieser Kolben war nach zwei Seiten hin geöffnet – auf der einen zu einem Hörrohr verjüngt, auf der anderen mit einer größeren, kreisrunden Öffnung versehen, um den Eintritt von Schall zu ermöglichen. Jeder Kolben resonierte bei einer bestimmten Frequenz, die vom Volumen und der Form des Kolbens abhing, und erklang stark hervorgehoben, während die restlichen Frequenzen unterdrückt wurden. Das Kolbenset war nach der harmonischen Obertonreihe *gestimmt*, das heißt nach den ganzzahligen Vielfachen der Frequenz des größten Kolbens. Mit einem solchen Resonator konnte Helmholtz selbst aus einem Rauschen den Resonanzton – sofern er vorhanden war – *präzise herausfiltern*; mit dem

[65] Hermann v. Helmholtz. *Ueber die physiologischen Ursachen der musikalischen Harmonie.* S.137/138

vollständigen Set ließ sich die spektrale Zusammensetzung musikalischer Töne (etwa gesungener Vokale oder Violinentöne) ziemlich genau angeben. Sie werden nach ihrem Erfinder seitdem als Helmholtz-Resonatoren bezeichnet.

> „Man kann sich durch Versuche von den angegebenen Eigenschaften der Resonatoren leicht überzeugen. Man setze einen solchen an das Ohr und lasse irgend ein mehrstimmiges Musikstück von beliebigen Instrumenten ausführen, in dem öfters der Eigenton des Resonators vorkommt. So oft dieser Ton angegeben wird, wird das mit dem Resonator bewaffnete Ohr ihn gellend durch alle anderen Töne des Accords hindurchdringen hören."[66]

Helmholtz ließ Vokale und Instrumentenklänge auf den tiefsten Ton der Resonatoren singen, prüfte der Reihe nach auf Resonanz und verglich die Lautstärken der vorhandenen Obertöne. So konnte er nach und nach die Obertonspektren verschiedenartiger Klangerzeuger anschreiben und dadurch Zusammenhänge zwischen den Obertonverteilungen und *musikästhetischen* Klangcharakteristika wie Schrillheit, Leerheit oder Dumpfheit herstellen.

3.3.3 Wissenstransfer und Rückkopplungen zwischen Mathematik und Medientechnik

Helmholtz interessierten jedoch nicht nur die klangfarblichen Unterschiede zwischen den Instrumenten im allgemeinen, sondern auch die Einflüsse verschiedener Spiel- und Erregungsweisen auf das Obertonspektrum ganz bestimmter Instrumente. So profitiert im besonderen der Instrumentenbau von den Untersuchungen der musikalischen Akustik: Theodor Steinway, als einziger der nach Amerika übergesiedelten Klavierbauerfamilie in Deutschland verblieben, assistierte Helmholtz bei zahlreichen Forschungsexperimenten zur Verbesserung der Klangfarbe des Pianofortes. Ziel war vor allem, das Instrument lauter und voller klingen zu lassen, das heißt der Rahmen sowie Form und Position der Anschlagshämmer wurden so optimiert, dass sich ein möglichst obertonreicher Klang erzeugen ließ. Steinway verbesserte mit dem bei Helmholtz erworbenen Wissen eifrig die Qualität seiner Instrumente und stattete als Gegenleistung eben jenen Helmholtz zeitlebens mit Klavieren aus, um diesem weitere Forschungen zu ermöglichen und außerdem, um ihn sich ganz privat an musikalischen Klängen erfreuen zu lassen - denn Helmholtz soll auch ein passabler Pianist gewesen sein.[67]

Um seine Ergebnisse aus den Untersuchungen der Klangfarben auf ein festes Fundament stellen zu können, entwickelte Helmholtz neben dem *reverse engineering* der *Analyse* auch Methoden zur *Synthese* von Klangfarben. Er versuchte,

[66] Hermann v. Helmholtz. *Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik.* S.75

[67] Zur Beziehung von H. v. Helmholtz und Theodor Steinway siehe: Elfrieda und Erwin Hiebert. *Helmholtz und die physiologischen Grundlagen der Musik.* S. 305ff.

> „... Töne verschiedener Klangfarbe durch directe Zusammensetzung einfacher Töne, wie man sie durch Stimmgabeln erzeugen kann, herzustellen. Als eines der passendsten Objecte der Nachahmung boten sich die verschiedenen Vocale der menschlichen Sprache dar, weil diese als gleichmässig anhaltende musikalische Töne hervorgebracht und ziemlich, wenn auch nicht ganz frei von unmusikalischen Geräuschen gehalten werden können.“[68]

Dieser Apparat bestand aus acht verschiedenen Stimmgabeln, die ebenso wie die Resonatoren nach der harmonischen Obertonreihe gestimmt sind.[69]

> „Jede Stimmgabel ist zwischen den Schenkeln eines kleinen hufeisenförmig gebogenen Elektromagneten befestigt, und mit einer abgestimmten Resonanzröhre verbunden. Die Oeffnungen der Resonanzröhren sind mit beweglichen Deckeln versehen, welche durch Fäden, deren Enden an einer kleinen Claviatur befestigt sind, fortgezogen werden können. Die Stimmgabeln werden in Bewegung gesetzt durch intermittirende elektrische Ströme, die nach dem Prinzip des N e e f' schen Hammers erzeugt werden, und deren Zahl in der Secunde gleich ist der Schwinungszahl der tiefsten Gabel, nämlich 112. [...] Die Stärke der Töne, welche man angeben will, kann man leicht reguliren, indem man die betreffenden Röhren mehr oder weniger vollständig öffnet. [. . .] So lernte ich allmählig die verschiedenen Vocalklänge mehr oder weniger vollständig nachbilden, und zwar ziemlich gut und deutlich U, O, Oe, E, etwas weniger gut J, Ue, [. . .] A und Ae.“[70]

Die Helmholtzsche Klanganalyse antizipiert also schon im 19. Jahrhundert die Klangsynthese des 20. Jahrhunderts, denn mit seinem Vokalsynthesizer wird Helmholtz, in der bewährten Tradition Sauveurscher Obertonmischkunst, zum Urvater der *Additiven Klangsynthese*. Zudem *abstrahiert* er die Klangfarbe, ähnlich dem Übergang von der Material- zur Frequenztheorie bei der Parametrisierung der Tonhöhe, von den sie erzeugenden Körpern, indem er sie durch die Stimmgabelanordnung modular herstellt. Damit unterscheidet sich die Helmholtzsche Vokalsynthese erheblich von den Versuchen seiner Vorgänger[71], die in ihren Sprechmaschinen statt der spezifischen Obertonstrukturen stets die Formen der Mundhöhle nachahmten.

Durch seine Wirkung auf die musikalische sowie messtechnische Klangproduktion steht Helmholtz am Ende des 19. Jahrhunderts eindrucksvoll für die Eigentümlichkeit der Naturwissenschaften, die spätestens das 20. Jahrhundert zur Regel erhoben hat: Früher oder später werden alle Ergebnisse der Naturwissenschaft, die in mathematische Zusammenhänge gefasst werden können, in die Synthese ihrer eigenen Gegenstände durch technische Medien münden. Es gilt, wie Friedrich Kittler hervorhebt: „Analyse und Synthese, Wissenschaft und Medientechnik, bleiben in Balance.“[72]

---

[68] Hermann v. Helmholtz. *Wissenschaftliche Abhandlungen*. XX. Ueber die Klangfarbe der Vocale. S.401

[69] Helmholtz verwendet Stimmgabeln mit den Tonhöhen $B, b, f_1, b_1, d_2, f_2, as_2$ und b_2.

[70] Hermann v. Helmholtz. *Wissenschaftliche Abhandlungen*. XX. Ueber die Klangfarbe der Vocale. S.401f.

[71] Vgl. zum Beispiel die Apparate von Christian Gottfried Kratzenstein, Wolfgang v. Kempelen und John Wallis.

[72] Friedrich Kittler, *Musik und Mathematik I*. Vorlesung, gehalten im Sommersemester 2001 am Kulturwissenschaftlichen Seminar der Humboldt-Universität Berlin, S.3 (DIN A4 Ausdruck).

4 Literaturverzeichnis

Jean Le Rond d'Alembert. *Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration*. Mémoires de l'Académie des Sciences. Berlin, 1747. Isaac Beeckman. *Journal*.

Albert Cohen. *Music in the French Royal Academy of Sciences*. A study in the evolution of musical thougt. Princeton University Press. Princeton, New Jersey, 1981.

Floris H. Cohen. *Quantifying Music*. The Science of Musicf at the First Stage of the Scientific Revolution. The Universtity of Ontario Series in Philosophy of Science. Bd. 23. Dordrecht, Boston, Lancaster, 1984.

Peter Dear. *Mersenne and the Learning of the Schools*. In: Cornell History of Science Series. Hrsg. Pearce Williams. Cornell University Press. Ithaca and London, 1988.

René Descartes. *Musicae Compendium*. Leitfaden der Musik. 1618. Hrsg. Johannes Brockt. Wissenschaftliche Buchgesellschaft. Darmstadt, 1992.

Sigalia Dostrovsky/John T. Cannon. *Entstehung der musikalischen Akustik (1600-1750)*. In: Geschichte der Musiktheorie. Hören, Messen und Rechnen in der frühen Neuzeit. Hrsg. Frieder Zaminer. Wissenschaftliche Buchgesellschaft. Darmstadt, 1987.

Joseph de Fourier, *Analytische Theorie der Wärme*. Deutsche Ausgabe v. Dr. B. Weinstein. Verlag von Julius Springer. Berlin, 1884.

Galileo Galilei. *Discorsi e dimostrazioni matematiche*. Florenz, 1638.

Roland Hecker. *Zur Geschichte des akustischen Tones*. Köster Verlag. Berlin, 2001.

Hermann v. Helmholtz. *Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik*. 5. Ausgabe. Verlag Friedrich Vieweg und Sohn. Braunschweig, 1896.

Hermann v. Helmholtz. *Ueber die physiologischen Ursachen der musikalischen Harmonie*. Vorlesung gehalten in Bonn 1857.

Hermann v. Helmholtz. *Wissenschaftliche Abhandlungen*. Johann Ambrosius Barth. Leipzig, 1882.

Elfrieda und Erwin Hiebert. *Helmholtz und die physiologischen Grundlagen der Musik*. In: Universalgenie Helmholtz. Rückblick nach 100 Jahren. Hrsg. Lorenz Krüger. Akademie Verlag. Berlin, 1994.

Hellmut Ludwig. *Marin Mersenne und seine Musiklehre*. In: Beiträge zur Musikforschung. Bd. 4. Hrsg. Max Schneider. Max Niemeyer Verlag. Tübingen, 1971.

Friedrich Kittler, *Musik und Mathematik I*. Vorlesung, gehalten am Kulturwissenschaftlichen Seminar der Humboldt-Universität Berlin. Sommersemester 2001.

Marin Mersenne, *Harmonie Universelle*. 1636/37.

Marin Mersenne. *La Verité´des Sciences*. 1625.

Marin Mersenne. *Questions harmoniques*. 1634.

Marin Mersenne. *Questions physico-mathématiques*. 1644

Gerhard Nestler. *Geschichte der Musik*. Bertelsmann Verlag. Gütersloh, 1962.

Isaac Newton. *Mathematische Prinzipien der Naturlehre*. Hrsg. von W. Abendroth. Ostwalds Klassiker Nr. 96. Leipzig, 1898.

Georg Simon Ohm. *Ueber die Definition des Tones nebst daran geknüpfter Theorie der Sirene und ähnlicher tonbildender Vorrichtungen*. 1843.

Joseph Sauveur. *Application des sons harmoniques à la composition des jeux d'orgues*. Mémoires de l'Académie des Sciences. Paris, 1702.

Joseph Sauveur. *Collected Writings on musical acoustics (Paris 1700-1713)*. In: Tuning and Temperament. Edited by Rudolf Rasch. The Diapason Press. Utrecht, 1984.

Joseph Sauveur. *Système général des intervalles des sons*. Mémoires de l'Académie des Sciences. Paris, 1701.

Wolfgang Schreier. *Geschichte der Physik*.

Oswald Spengler, *Der Untergang des Abendlandes*. Umrisse einer Morphologie der Weltgeschichte. Verlag C.H. Beck. München, 1923/1990.

Brook Taylor. *Of Music*. Brook Taylor Collection. St. John's College Library, Cambridge.